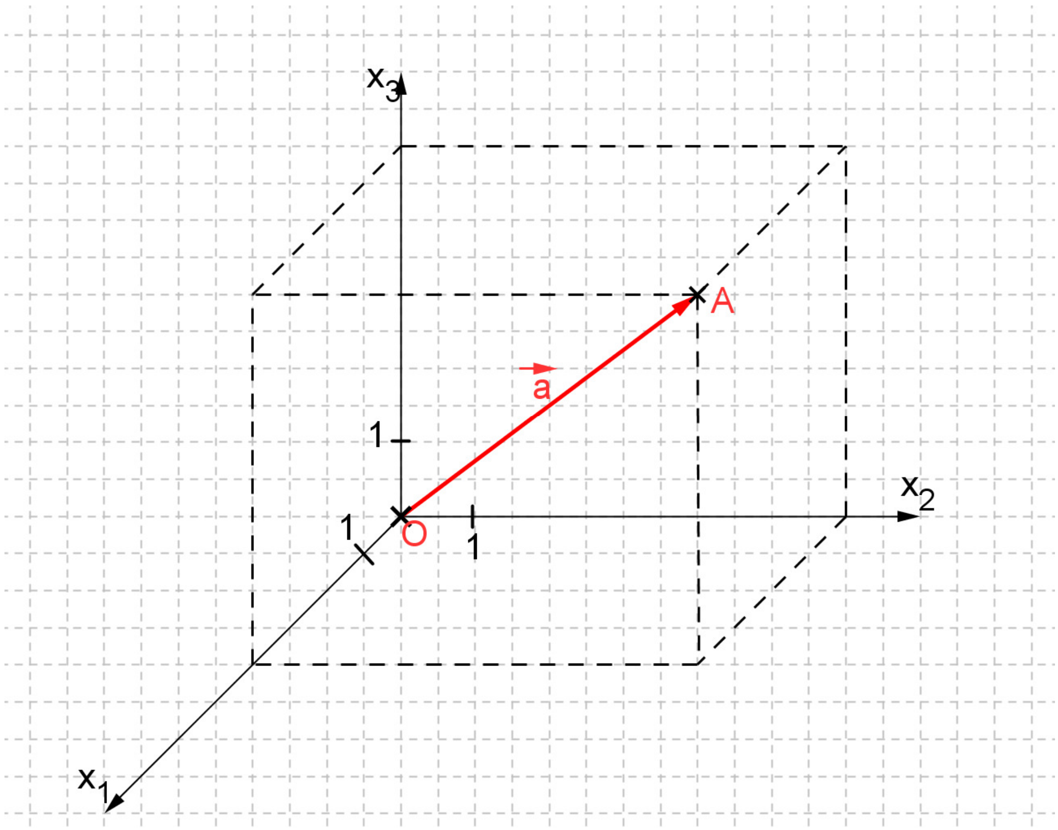
A IV Koordinatengeometrie

a) Das dreidimensionale Koordinatensystem



Der Punkt $A(a_1/a_2/a_3)$ hat im Beispiel die Koordinaten A(4/6/5):

Der Vektor $\vec{a} = \vec{OA}$ heißt Ortsvektor von A und wird meist mit $\vec{A}$ bezeichnet .

$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ hier : $\vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

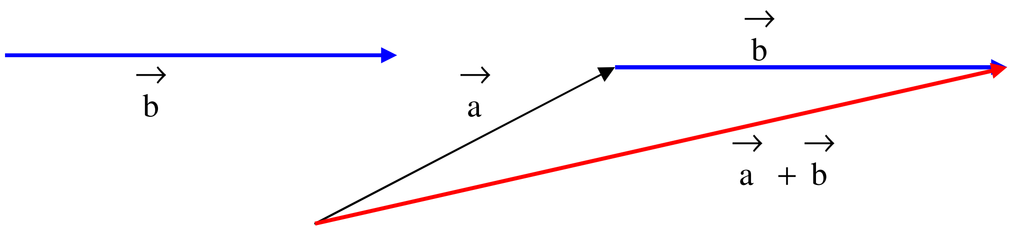
Die Länge des Vektors $\vec{A} = |\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

hier : $|\vec{A}| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{77}$

b) Addition zweier Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$

Zeichnerisch: Wir hängen an die Spitze des 1. Vektors $\vec{a}$ den Fuß des 2. Vektors $\vec{b}$;

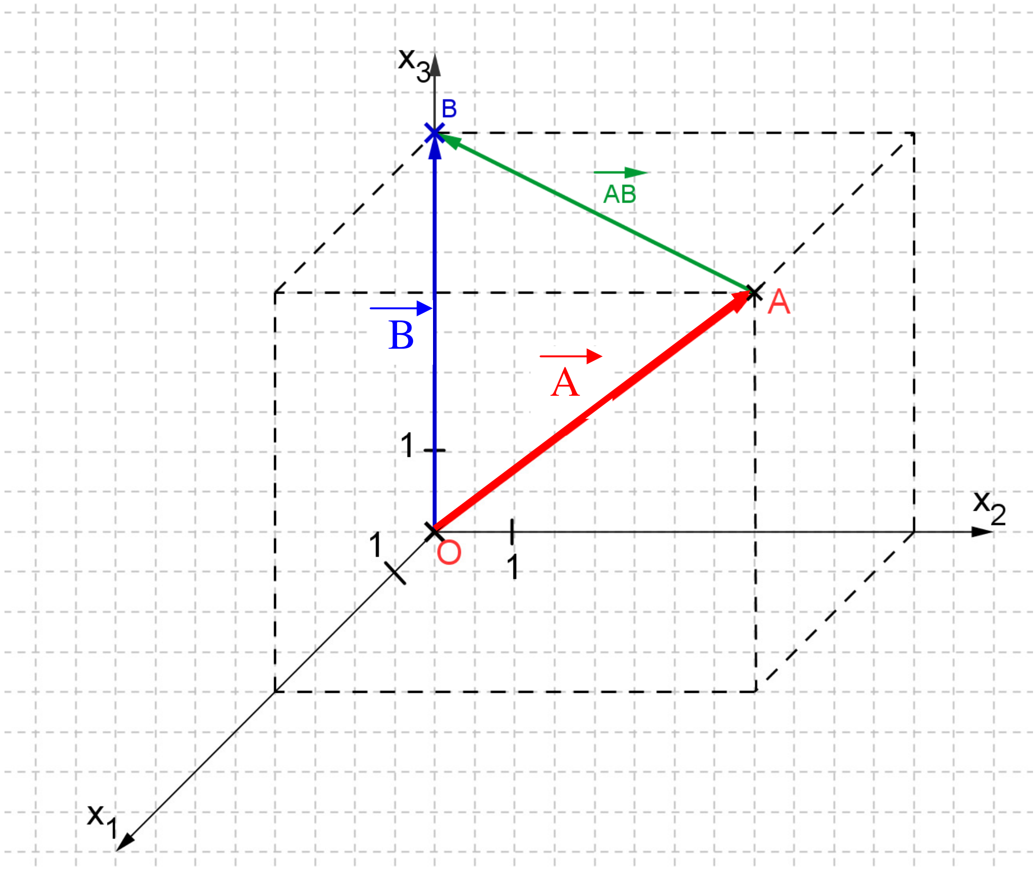
der Summenvektor zeigt dann vom des Vektors $\vec{a}$ zur Spitze des Vektors $\vec{b}$.



$\underline{\text{Rechnerisch:}}$ $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

Beispiel : $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

<u>c) Der Verbindungsvektor</u> $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$



Es gilt: $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = -\overrightarrow{\mathbf{A}} + \overrightarrow{\mathbf{B}} = \overrightarrow{\mathbf{B}} - \overrightarrow{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

Im Beispiel : B(0/0/5) ; A(4/6/5) : $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bem.: $\overrightarrow{AB}$ ist im Beispiel parallel zur x_1x_2-Ebene, deswegen ist die x_3-Koordinate des Vektors $\overrightarrow{AB}$ gleich 0.

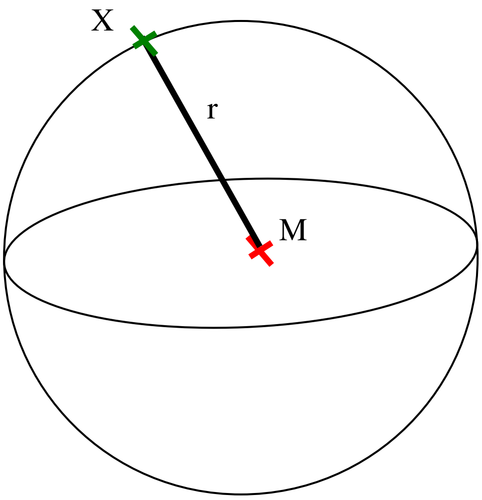
Mit dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ erhalten wir die Länge der Strecke von A nach B:

$$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

d) Die Kupelgleichung

Da die Kugeloberfläche aus der Menge aller Punkte X besteht, die vom Mittelpunkt M den Abstand r haben, gilt wegen c):

$\overline{MX}^2 = r^2$ gleichbedeutend mit : $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$
„Kugelgleichung“

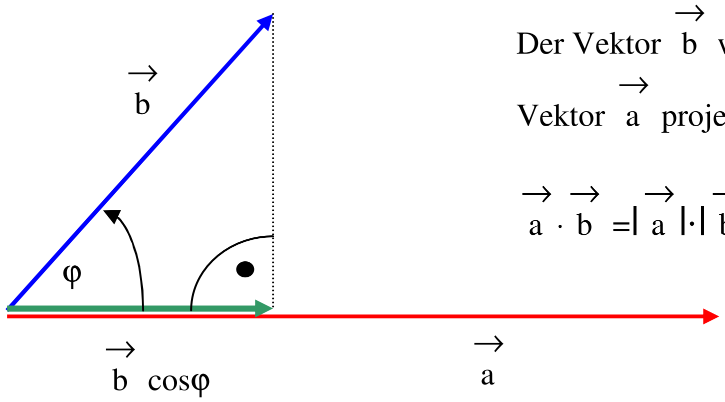


e) Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Unter dem Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ verstehen wir: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Beim Skalarprodukt wird dem Produkt zweier Vektoren eine Zahl zugeordnet.

Zeichnerisch:



Der Vektor $\vec{b}$ wird senkrecht auf den Vektor $\vec{a}$ projeziert und es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$$

Mit dieser zeichnerischen Darstellung ist nun der Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definiert:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Stehen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander senkrecht (orthogonal), so gilt: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$; d.h. $\varphi = 90°$.

Beispiele: 1. siehe unter c) $\vec{B} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \begin{pmatrix}-4\\-6\\0\end{pmatrix}$; $\vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AB}} = 0$; die Flächendiagonale steht hier senkrecht auf der Kante .

2. siehe unter c) $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{A} = \begin{pmatrix}-4\\-6\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\6\\5\end{pmatrix} = (-4)\cdot 4 + (-6)\cdot 6 + 0\cdot 5 = -52$

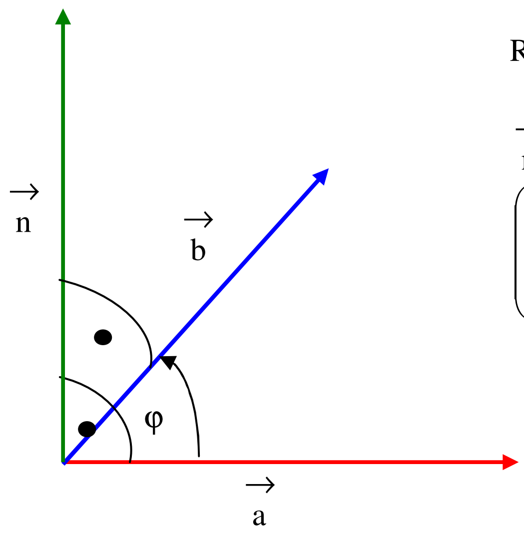
3. Winkel α zwischen $\overrightarrow{AB}$ und $\vec{A}$ (dazu werden die Vektoren mit ihren „Füßen“ aneinander geheftet :

$$\cos\alpha = \frac{-52}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{77}} = -0{,}8218 \Rightarrow \alpha = 145°$$

f) Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$

Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ liefert einen Vektor $\vec{n}$, der sowohl senkrecht auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ steht.

Zeichnung:

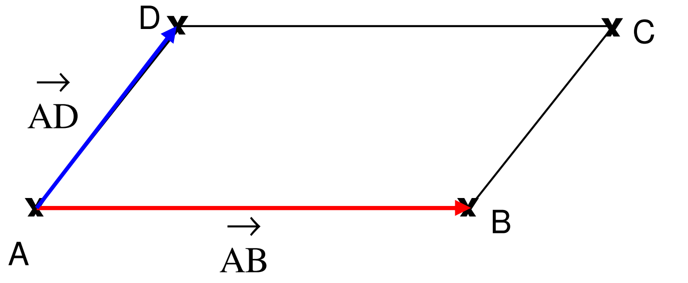


Rechnung:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \mathbf{x} \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2b_3 - a_3b_2\\a_3b_1 - a_1b_3\\a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix}$$

Weiter gilt : $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$

Damit gilt: 1. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms eines Parallelogramms, das z.B. von den Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AD}$ ist: $A_{Pa} =^{:} |\vec{AB} \times \vec{AD}|$



2. Folglich gilt für den Flächeninhalt eines Dreiecks: $A_\Delta = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

3. Ein Spat (einander gegenüberliegende Seitenflächen sind Parallelogramme), das von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird, hat das Volumen :

$V_{Spat} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$

4. Eine dreiseitige Pyramide, die von den Vektoren $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ und $\vec{AD}$ aufgespannt wird, hat das Volumen : $V_{3\text{-seitige Py}} = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \circ \vec{AD}|$